

## MODELAGEM INVERSA PARA OBTENÇÃO DE PARÂMETROS PARA A EQUAÇÃO DE RICHARDS

### INVERSE MODELING FOR OBTAINING PARAMETERS FOR THE EQUATION OF RICHARDS

Fábio Freitas Ferreira<sup>1</sup>, Gustavo Bastos Lyra<sup>2</sup>, Marcelo de Oliveira Temperini<sup>3</sup>, Antônio José da Silva Neto<sup>4</sup>, Wagner Rambaldi Telles<sup>5</sup>, Ranulfo Martins Carneiro Neto<sup>6</sup>

#### RESUMO

Problemas que envolvem o movimento da água no solo, despertam interesse acadêmico desde o século passado. Dados da *Food and Agriculture Organization* (FAO) mostram grande desperdício de água, principalmente na irrigação de solos saturados. O movimento de água no solo pode ser determinado por meio da equação de Richards, que é um modelo matemático responsável por calcular a umidade volumétrica no solo, assim como o potencial de água no mesmo. Trata-se de uma equação diferencial parcial parabólica não-linear, que necessita de parâmetros empíricos, analisados em laboratório, o que demanda alto custo financeiro e de tempo. Neste trabalho são obtidos os resultados numéricos da solução da equação de Richards, a qual é resolvida utilizando o Método de Volumes Finitos, que tem como característica ser conservativo. Para resolver a referida equação é necessário conhecer a curva de retenção, que é uma relação entre umidade volumétrica e potencial de água no solo. Para validar os resultados obtidos, utiliza-se o trabalho de Haverkamp. Foi implementada a modelagem inversa para obter os parâmetros da equação de Richards aplicando o método de Luus-Jaakola, os resultados simulados foram similares aos dados experimentais.

**Palavras-chave:** Percolação. Equação de Richards. Método de Volumes Finitos. Problema Inverso. Luus-Jaakola.

#### ABSTRACT

Problems involving the movement of water in the soil have aroused academic interest since the last century. Data from the Food and Agriculture Organization (FAO) shows a great waste of water, mainly in the irrigation of saturated soils. The movement of water in the soil can be determined by means of the Richards equation, which is a mathematical model responsible for calculating the volumetric moisture in the soil, as well as the water potential in the soil. It is a non-linear partial parabolic differential equation that requires empirical parameters, analyzed in the laboratory, which demands high financial and time cost. In this work the numerical results of the solution of the Richards equation are obtained, which is solved using the Finite Volume Method, which has the characteristic of being conservative. To solve the Richards equation it is necessary to know the retention curve, which is a relation between volumetric moisture and soil water potential. To validate the obtained results, the work of Haverkamp is used. Reverse modeling was implemented to obtain the parameters of the Richards equation using the Luus-Jaakola method, the results of simulation were similar to the experimental data.

**Keywords:** Percolation. Richards equation. Finite Volume Method. Inverse Problem. Luus-Jaakola.

1 Doutorado em Modelagem Computacional – Departamento de Ciências da Natureza – Instituto de Humanidade e Saúde – Universidade Federal Fluminense – fabiofreitasferreira@id.uff.br

2 Mestrado em Engenharia de Biosistemas (UFF) - Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro – marcelotemperini@id.uff.br

3 Doutorado em Agronomia – Departamento de Ciências Ambientais – Instituto de Floresta – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – gbylra@ufrj.br

4 Ph.D. Engenharia Mecânica e Aeroespacial – Instituto Politécnico – Universidade do Estado do Rio de Janeiro – ajs\_net@uol.com.br

5 Doutorado em Modelagem Computacional – INFES – Universidade Federal Fluminense – wtelles@id.uff.br

6 Mestre em Modelagem Computacional – Centro de Tecnologia e Aplicação de Compósitos. – Universidade Federal do Rio

## 1. INTRODUÇÃO

Diante de um cenário recente de escassez hídrica, observa-se o desperdício de água no setor agropecuário, principalmente nas irrigações, que de maneira desregrada e sem controle da umidade do solo, são feitas em sua maioria sem embasamento técnico-científico.

O movimento da água no solo é um processo importante em estudos de manejo e conservação de recursos hídricos, irrigação e drenagem, assim como no transporte de calor e solutos (nutrientes e pesticidas). O transporte de água no solo pode ser descrito numericamente usando a equação de Richards, que combina a lei de Darcy e a equação de continuidade, (TEMPERINI, 2018). Entretanto, para a sua solução, é necessário conhecer a relação entre o conteúdo de água no solo e a pressão da água, descrita por uma curva de retenção de água, (KROES, et al., 2017).

Recentemente, os trabalhos de Silva Neto e White (1994), Celia, Ahuja, e Pinder (1987), Celia, Bouloutas, e Zarba (1990), Huang et al. (1996), Lee e Abriola (1999), Pachepsky, Timlin, e Rawls (2003), Lu, Godt, e Wu, (2010) e Zha et al. (2013), mostraram resultados referentes a solução numérica da equação de Richards. Em sua maioria utiliza-se a formulação mista da referida equação, pois experimentos mostram que os métodos numéricos para esta equação conservam suas propriedades, (KROES et al., 2017). Por outro lado, Guterres (2013) utilizou o Método de Volumes Finitos (MVF), que é de fácil implementação e, principalmente, um método conservativo, para resolver a equação de Richards em duas dimensões, e Temperini (2018) aplicou o MVF em uma dimensão.

Para a equação de Richards ser calculada numericamente são necessários parâmetros específicos da curva de retenção de água no solo, assim como da função condutividade hidráulica. Estes parâmetros podem ser encontrados de forma experimental, com um alto custo financeiro e resultados demorados.

Alternativamente, este conjunto de parâmetros é obtido aplicando-se uma abordagem baseada em Problemas Inversos. Problemas Inversos podem ser resolvidos utilizando-se métodos determinísticos (MOURA NETO e SILVA NETO, 2012) ou métodos estocásticos (SILVA NETO et al., 2016). Neste artigo foram utilizados os métodos Luus-Jaakola (LUUS e JAAKOLA, 1973), e o Algoritmo de Colisão de Partículas (SACO e OLIVEIRA, 2005).

A curva de retenção de água pode ser representada por vários modelos empíricos, nos quais seus parâmetros devem ser ajustados a diferentes tipos de solo. A determinação dos parâmetros utilizando métodos tradicionais (por exemplo, aparelho de placa de pressão

Richards) exige uma quantidade significativa de tempo e recursos financeiros. Assim, o presente artigo apresenta a obtenção dos parâmetros da curva de retenção de água no solo pelos métodos Luus-Jaakola e o Algoritmo de Colisão de Partículas. Além da obtenção dos parâmetros da curva de retenção, foi realizada uma análise de sensibilidade do problema para o caso abordado.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

### 2.1. Problema Direto

Para modelar o problema de infiltração de água no solo utiliza-se a equação de Richards, que descrita na forma  $\psi$ -baseado, (KROES et al., 2017; TEMPERINI, 2018), é dada por

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \right] \quad (1)$$

em que,  $\psi$  é a pressão ( $cm$ ),  $C(\psi)$  é a capacidade hídrica,  $t$  é o tempo,  $K(\psi)$  é a condutividade hidráulica ( $cm d^{-1}$ ) e  $z$  é a coordenada vertical ( $cm$ ), no sentido da origem ao eixo negativo,  $-z$ , (GUTERRES, 2013). Para fim deste trabalho, a resolução da equação foi obtida usando o Método de Volumes Finitos (MVF) adotado em Temperini (2018).

Para resolver a equação de Richards é necessário conhecer a função da condutividade hidráulica, que determina a velocidade da infiltração da água no solo. A função condutividade hidráulica de van Genuchten e Mualem é dada por

$$K(\psi) = K_s (1 - (\alpha|\psi|)^{n-1} [1 + (\alpha|\psi|^n)^{-m}]^2 [1 + (\alpha|\psi|^n)^n]^{-\frac{m}{2}} \quad (2)$$

em que,  $K_s$  é a condutividade hidráulica saturada ( $cm s^{-1}$ ),  $\alpha$  ( $cm^{-1}$ ), e  $n$  e  $m$  (adimensionais) são fatores empíricos. Os parâmetros  $m$  e  $n$  estão relacionados por  $m = 1 - 1/n$ , (KROES et al., 2017).

A umidade volumétrica do solo é obtida com a solução da Equação de Richards, por meio da curva de retenção de água no solo proposta por van Genuchten, (VAN GENUCHTEN, 1980),  $\theta = \theta(\psi)$ , é dada por

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + |\alpha\psi|^n)^{-m} \quad (3)$$

em que,  $\theta_s$  é a umidade volumétrica do solo saturado ( $cm^3 cm^{-3}$ ),  $\theta_r$  é a umidade volumétrica do solo residual, isto é, após a drenagem do solo ( $cm^3 cm^{-3}$ ).

## 2.2. Problema Inverso

Considere os valores obtidos experimentalmente para a umidade volumétrica de água no solo representada por  $\theta_e$  ( $cm^3 cm^{-3}$ ), e a umidade volumétrica de água no solo calculada usando o MVF representada por  $\theta_c$  ( $cm^3 cm^{-3}$ ). O resíduo entre as quantidades calculadas e experimentais é dado por

$$\mathbf{R} = \theta_c - \theta_e \quad (4)$$

O objetivo é determinar um conjunto de parâmetros que faça com que o resíduo seja o menor possível. Tem-se então um problema de minimização a ser abordado.

Assim, considere-se o funcional dos resíduos quadrados dado por

$$Q(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} |\mathbf{R}|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (5)$$

em que,  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_M)^T \in \mathbb{R}^M$  representa o vetor dos resíduos, equação (4),  $M$  é a quantidade de dados experimentais disponível, e  $\mathbf{P}$  é o vetor que contém os parâmetros a serem estimados, isto é, a solução do problema inverso (MOURA NETO e SILVA NETO, 2012).

Substituindo (4) em (5), resulta

$$Q(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\theta_c - \theta_e)^2 \quad (6)$$

Os dados experimentais,  $\theta_e$ , foram obtidos do trabalho de Guterres (2013). Foi utilizado o software *pegaponto* para extrair as informações necessárias.

A estimativa para o vetor de incógnitas  $\mathbf{P}$  é realizada pelos métodos de otimização Luus-Jaakola e Algoritmo de Colisão de Partículas, os quais são descritos sucintamente nas seções a seguir.

## 2.3. Método de Luus-Jaakola

No grupo de métodos estocásticos encontra-se o método de Luus-Jaakola (LUUS e JAAKOLA, 1973; SILVA NETO, BECCENERI, e CAMPOS VELHO, 2016). Luus e Jaakola desenvolveram um procedimento muito simples para resolver problemas de máximos e mínimos com restrições. O procedimento se baseia em minimizar o funcional descrito na equação (6). As restrições do problema em questão são limitações dadas para cada um dos parâmetros a ser determinado. Isto é,

$$MIN_P \leq P \leq MAX_P \quad (7)$$

em que,  $MIN_P$  e  $MAX_P$  são respectivamente os vetores contendo os limites inferiores e superiores do intervalo de busca dos parâmetros de interesse (vetor  $P$ ).

Juntando-se a equação (6) com a equação (7) tem-se um problema de minimização condicionado, o qual é resolvido com o método Luus-Jaakola descrito a seguir. Primeiramente, lê-se o vetor com os dados experimentais  $\theta_e$ ; as restrições são definidas, isto é, os valores máximos e mínimos de  $P$ , veja equação (7), de acordo com a literatura existente; uma estimativa inicial aleatória é gerada, dentro das restrições descritas; estes valores iniciais são definidos por  $P^0$ , e a amplitude do intervalo de busca por  $r^0 = MAX_{P^0} - MIN_{P^0}$ .

Resolve-se o problema direto com a estimativa inicial, ou seja, a equação de Richards, equação (1), usando o MVF e, em seguida calcula-se o resíduo  $Q = Q(P^0)$  de acordo com a equação (6).

O método consiste em minimizar o funcional de forma iterativa. Para isso define-se o número de iterações externas,  $N_{out}$ , em que será feita a redução da amplitude do intervalo de busca, e o número de iterações internas,  $N_{int}$ , em que são gerados possíveis candidatos a solução de forma aleatória; a cada iteração calcula-se o resíduo  $Q = Q(P)$ ; caso o novo resíduo seja menor do que o calculado anteriormente, atualiza-se o melhor resíduo e a melhor configuração de parâmetros; ao fim do procedimento tem-se os parâmetros ideais, ou seja, a solução ótima do problema inverso.

#### 2.4. Algoritmo de Colisão de Partículas

O Algoritmo de Colisão de Partículas (*Particle Collision Algorithm* – PCA) foi proposto por Saco e Oliveira em 2005. Na classe dos algoritmos estocásticos, o PCA trabalha com estimativas aleatórias candidatas a solução, porém diferentemente do método Luus-Jaakola, ele não descarta as soluções não ótimas. Antes de realizar o descarte, é feita uma exploração em torno desta possível solução.

As restrições do problema são definidas por

$$L_P \leq P \leq U_P \quad (8)$$

em que,  $L_P$  e  $U_P$  são, respectivamente, os vetores contendo os limites inferiores e superiores do intervalo de busca para os parâmetros de interesse (vetor  $P$ ).

Para iniciar o PCA, lê-se o vetor contendo os dados experimentais; define-se o número de iterações a serem realizadas,  $N_{pca}$ , e o número de iterações a serem realizadas na exploração,  $N_{exp}$ ; gera-se uma solução inicial,  $\mathbf{P}^0$ , dentro das restrições impostas na equação (8); calcula-se o resíduo,  $Q = Q(\mathbf{P}^0)$ , conforme a equação (6).

Gera-se um novo candidato a solução de forma aleatória e calcula-se o novo resíduo  $Q = Q(\mathbf{P}^n)$ ; se  $Q(\mathbf{P}^n) < Q(\mathbf{P}^{n-1})$ , então usa-se como solução ótima a nova estimativa e é feita uma exploração numa região em torno dela para verificar se há algum outro candidato a solução melhor, e se houver passa-se a usá-lo como solução ótima; caso  $Q(\mathbf{P}^n) > Q(\mathbf{P}^{n-1})$  calcula-se a probabilidade de aceitação deste novo candidato a solução e, se ele for aceito, é feita uma exploração numa região em torno dele para verificar se há uma solução ótima; ao final do procedimento tem-se a solução ótima, isto é, a solução do problema inverso.

## 2.5. Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade do problema com relação a cada um dos parâmetros estimados é dada pela equação (9). Com esta análise é possível determinar o grau de sensibilidade de cada parâmetro a ser estimado. Os coeficientes de sensibilidade são definidos por

$$\bar{X}(\mathbf{P}) = \frac{\partial \theta_c}{\partial \mathbf{P}} \quad (9)$$

em que,  $\mathbf{P}$  é o vetor incógnita do problema inverso,  $\theta_c$  é obtido avaliando a equação (1) na solução  $\theta(\psi)$  do problema direto.

Neste trabalho optou-se por utilizar-se o coeficiente de sensibilidade modificado, dado por

$$X(\mathbf{P}) = P_i \cdot \bar{X}_i = P_i \cdot \frac{\partial \theta_c}{\partial P_i}, \quad i = 1, \dots, \#(\mathbf{P}) \quad (10)$$

em que,  $\#(\mathbf{P})$  é a quantidade de parâmetros a serem determinados.

Com coeficientes de sensibilidade que apresentam valores elevados, permite-se obter boas estimativas para os parâmetros dentro dos intervalos de confiança.

Para avaliar a dependência linear entre os parâmetros usa-se o coeficiente

$$W = \frac{X_i}{X_j}, \quad i, j = 1, \dots, \#(\mathbf{P}), \quad i \neq j \quad (11)$$

No caso de haver uma dependência linear tem-se que  $W = constante$  e, neste caso, não há como obter os parâmetros de separadamente.

### 3. RESULTADOS

O caso teste considera a infiltração num solo de profundidade de 100 cm, com 6,5 h de simulação, condição inicial  $\psi(z, 0) = -800 \text{ cm}$ ,  $0 < z < 100 \text{ cm}$ , condições de contorno  $\psi(0, t) = 0 \text{ cm}$  e  $\psi(100, t) = -800 \text{ cm}$ ,  $t > 0$ . Foram obtidos 16 dados experimentos distribuídos entre 0 e 100 cm de profundidade.

Os parâmetros da curva de retenção de van Genuchten são  $K_s = 10^{-4} \text{ cm s}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ ,  $n = 1,53$ ,  $m = 0,3464$ ,  $\theta_r = 0,186 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  e  $\theta_s = 0,363 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  (TEMPERINI, 2018).

#### 3.1 Análise de Sensibilidade

A seguir são apresentados os resultados das equações (10) e (11). Na Figura 1(a), observa-se os coeficientes de sensibilidade. Todos os parâmetros foram sensíveis as variações. Isto significa que dois conjuntos de parâmetros distintos acarretarão duas soluções distintas, ou seja, o funcional (6) é injetor. Este é o resultado esperado, pois caso contrário teríamos dois conjuntos de parâmetros resultando na mesma solução.

Nas Figuras 1(b)-1(e), observa-se a correlação entre os coeficientes de sensibilidade. Todas as correlações se apresentaram como esperado. Não há dependência linear entre os coeficientes. Porém, o parâmetro  $K_s$  foi excluído do conjunto, pois a solução da equação de Richards apresentou grandes oscilações para pequenas perturbações além das consideradas na análise de sensibilidade.

#### 3.2 Resultados Numéricos

O computador utilizado nas simulações numéricas foi Dell Ispiron 15 7000 Gaming, processador Intel Core i7 2.8 GHz, 16 GB de RAM, HD 1 TB, sistema Windows 10 64 bits.

Para cada método foram executadas 15 rodadas com a semente para o número aleatório iniciado em 1, a acrescida de 1 a cada rodada incrementada.

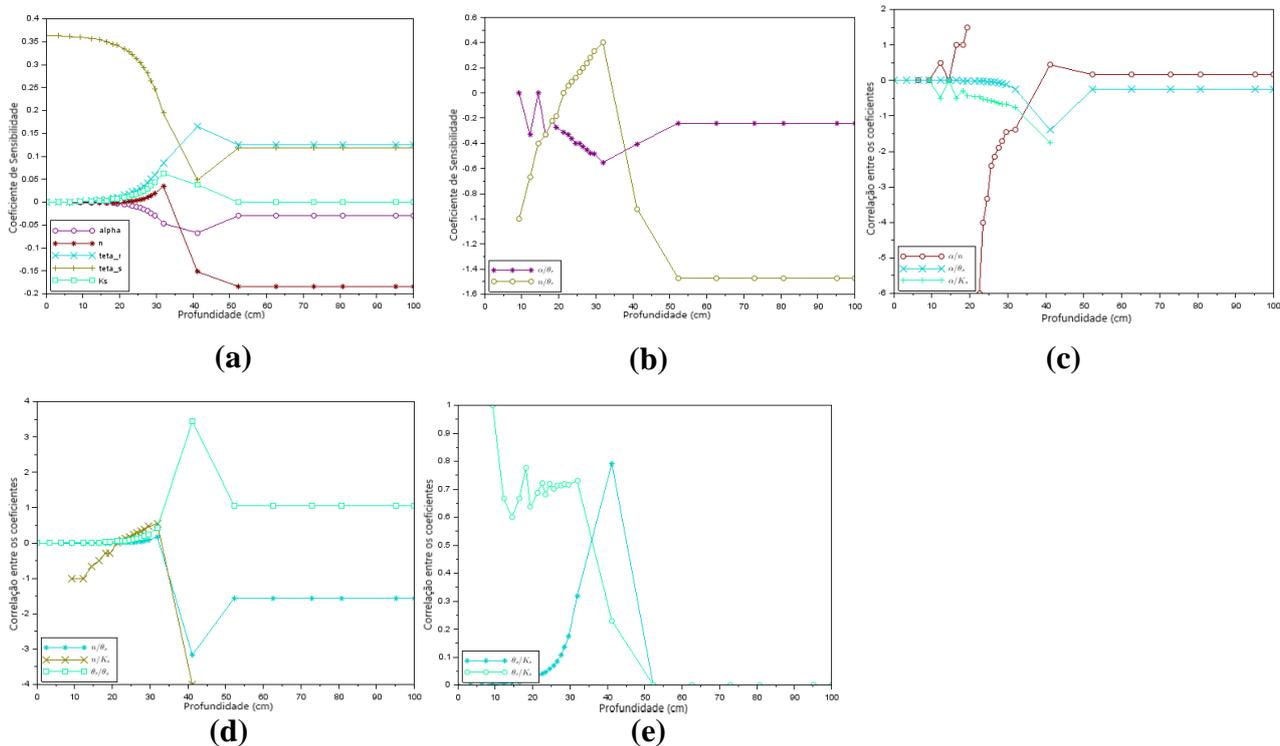


Figura 1. Coeficientes de sensibilidade dos parâmetros de van Genuchten.

### 3.2.1 Resultados Utilizando o Método Luus-Jaakola

O método Luus-Jaakola foi configurado com  $N_{OUT} = 100$ ,  $N_{INT} = 50$ , e o intervalo de busca com redução de 20%. Esta configuração foi utilizada por Temperini (2018) para outro caso teste, em um solo mais arenoso, obtendo bons resultados.

Na Tabela 1 são apresentados o melhor e o pior resultado obtidos com o método Luus-Jaakola. Como pode ser observado, os valores de  $\theta_r$  e  $\theta_s$  foram bem otimizados nos dois casos, com um erro de 0,0111, isto é, 5,96% para  $\theta_r$ , e um erro de 0,0018, ou seja, 0,49% para  $\theta_s$  no pior resultado dentre as 15 rodadas. Os parâmetros  $\alpha$ ,  $n$  e  $m$  também foram bem otimizados na maioria das rodadas. Os piores valores foram para  $n$  e  $m$  que tiveram um erro de 26,43% e 67,78%, respectivamente, e  $\alpha$ , que obteve um erro de 771%. Em 12 rodadas, o valor otimizado de  $\alpha$  foi exato, porém procura-se o melhor conjunto de parâmetros que otimiza os dados experimentais.

Neste sentido, outra análise realizada foi considerando-se o erro do pior resultado e utilizando-se a norma  $\max|\theta_c - \theta_e|$ , retornando um valor de  $7,5 \times 10^{-2}$ . O melhor resultado

obteve um erro de  $2,1 \times 10^{-3}$ . O tempo médio de execução do Método LJ foi de 8,74 h por rodada.

**Tabela 1. Parâmetros otimizados utilizando o método Luus-Jaakola.**

Dados estatísticos	$\alpha$	$n$	$m$	$\theta_r$	$\theta_s$
Experimental	0,01	1,53	0,3464	0,186	0,3638
Pior resultado	0,0871	1,1256	0,1116	0,1749	0,3656
Erro	0,0771	0,4044	0,2348	0,0111	0,0018
Erro percentual	<b>771%</b>	26,43%	67,78%	5,96%	0,49%
Melhor resultado	0,0104	1,5422	0,3516	0,1909	0,3625
Erro	0,0004	0,0122	0,0052	0,0049	0,0013
Erro percentual	4,00%	0,80%	1,50%	2,63%	0,35%

Na Figura 2, observa-se a umidade volumétrica do solo calculada utilizando-se o melhor conjunto de parâmetros otimizado, e os dados experimentais. Apesar do erro absoluto entre os parâmetros variarem de 0,35% a 4%, o conjunto de parâmetros retornou muito bem a umidade volumétrica do solo.

### 3.2.2 Resultados Utilizando o Algoritmo de Colisão de Partículas

O Algoritmo de Colisão de Partículas foi configurado com  $N_{PCA} = 50$ ,  $N_{EXP} = 60$ ,  $N_{PCA} = 100$  e  $N_{EXP} = 50$ . A Figura 5 apresenta a distribuição dos valores de cada parâmetro encontrado em cada rodada no LJ e do PCA. Os parâmetros  $\theta_r$  e  $\theta_s$  foram melhor otimizados pelo LJ, veja Figura 1b e Figura 1d. Os parâmetros  $\alpha$ ,  $n$  e  $m$  foram mais bem otimizados com o LJ, porém em algumas rodadas o valor destes se distanciou da média.

Analisando os resultados obtidos com o Algoritmo de Colisão de Partículas observa-se, Tabela 2 e Tabela 3, que os resultados foram inferiores comparados ao método Luus-Jaakola. Com exceção do parâmetro  $\alpha$  que teve um erro absoluto de 2%, todos os outros parâmetros foram inferiores.

As Figuras 3 e 4 mostram o gráfico da umidade volumétrica do solo calculada com os melhores parâmetros obtidos com as duas configurações. A solução do problema foi deslocada para um mínimo local afastado da solução desejada. Observou-se que o PCA recuperou o comportamento da função, e inclusive a amplitude  $\theta_s - \theta_r$  se não a mesma, próxima dos parâmetros originais. No caso dos parâmetros originais,  $\theta_s - \theta_r = 0,1778$ , e

para as duas configurações do PCA, tem-se, respectivamente, 0,177 e 0,1138.

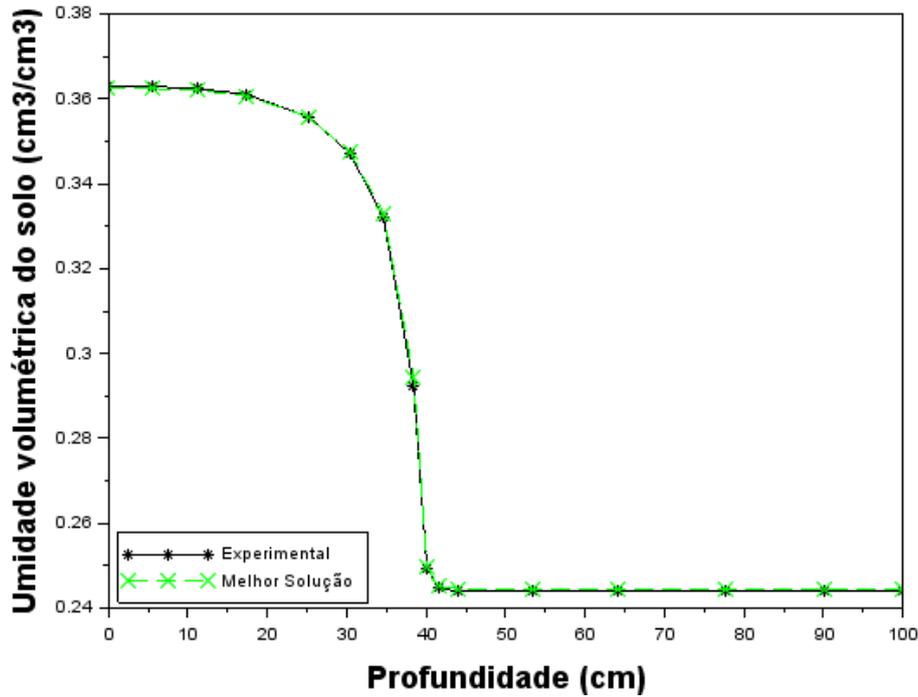


Figura 2. Melhor solução obtida com o método Luus-Jaakola.

Tabela 2. Parâmetros otimizados utilizando o PCA.

Rodada	$\alpha$	$n$	$m$	$\theta_r$	$\theta_s$
Experimental	0,01	1,53	0,3464	0,186	0,3638
Pior resultado 60 x 50	0,0205	1,2578	0,2049	0,1284	0,3763
Erro	0,0105	0,2722	0,1415	0,0576	0,0125
Erro percentual	105%	17,79%	40,85%	30,97%	3,44%
Melhor resultado 50 x 60	0,0102	1,4628	0,3164	0,2000	0,3770
Erro	0,0002	0,0672	0,0300	0,014	0,0132
Erro percentual	2,00%	4,39%	8,66%	7,53%	3,63%

Tabela 3. Parâmetros otimizados utilizando o PCA.

Rodada	$\alpha$	$n$	$m$	$\theta_r$	$\theta_s$
Experimental	0,01	1,53	0,3464	0,186	0,3638
Pior resultado 100 x 50	0,0288	1,2521	0,2013	0,1959	0,3552
Erro	0,0188	0,2779	0,1415	0,0099	0,0086
Erro percentual	188%	18,16%	40,85%	5,32%	2,36%
Melhor resultado 100 x 50	0,0228	1,5789	0,3667	0,2000	0,3138
Erro	0,0128	0,0489	0,0203	0,014	0,0500
Erro percentual	128%	31,96%	5,86%	7,53%	13,74%

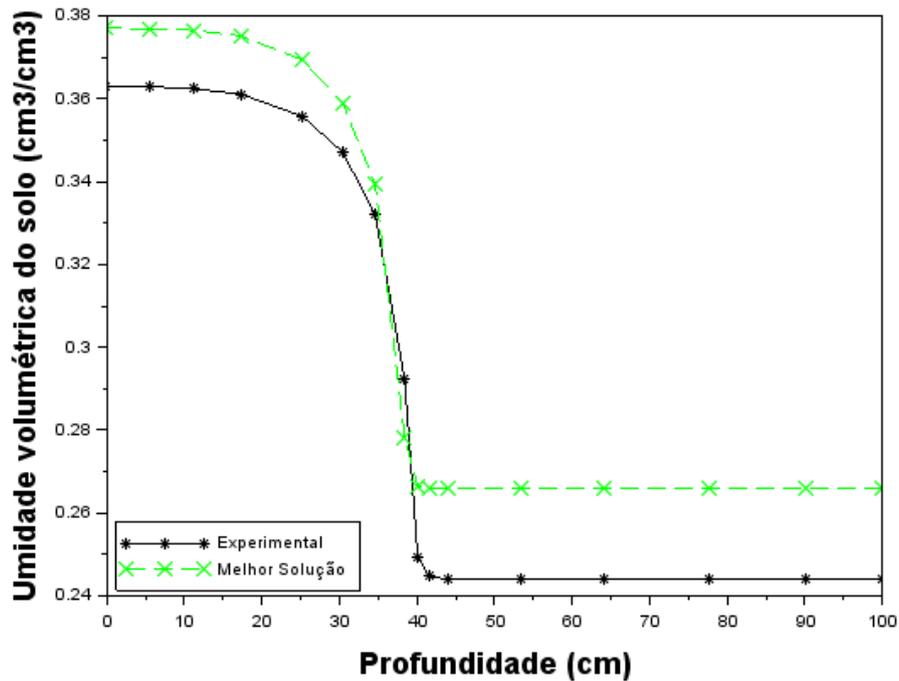


Figura 3. Resultado obtido com PCA  $N_{PCA} = 50$  E  $N_{EXT} = 60$ .

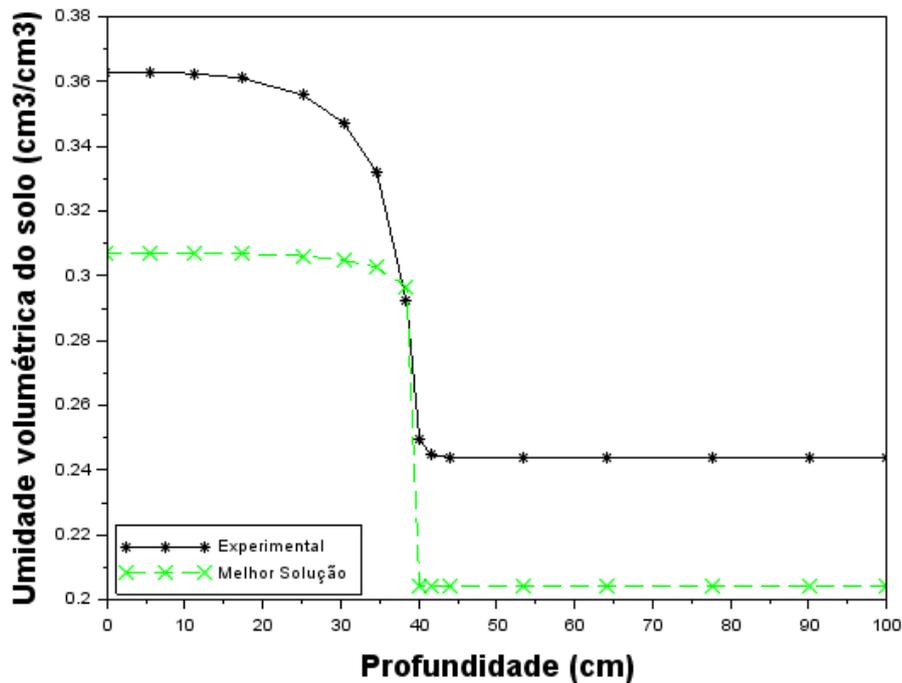
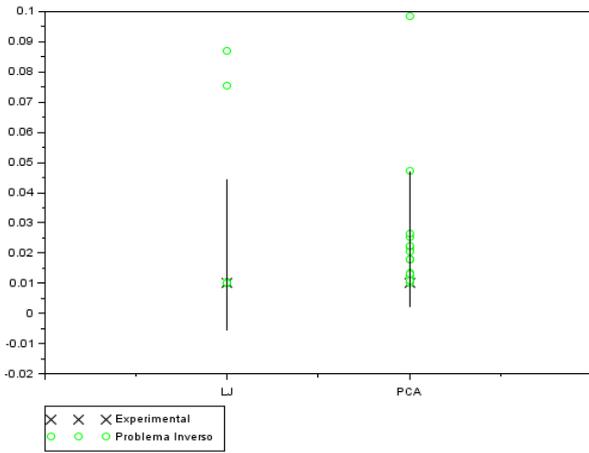
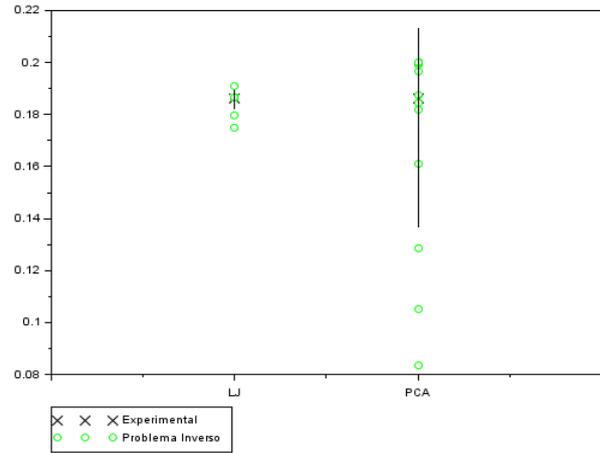


Figura 4. Resultado obtido com PCA  $N_{PCA} = 100$  E  $N_{EXT} = 50$ .

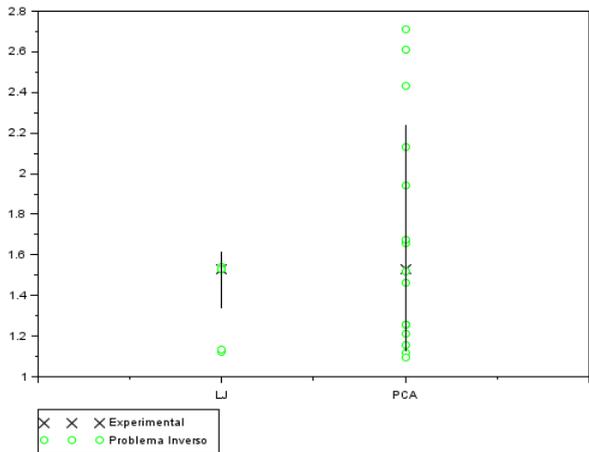
Na Figura 5 observa-se a distribuição dos resultados obtidos com todas as rodadas para o método Luus-Jaakola e PCA com a configuração  $N_{PCA} = 50$  e  $N_{EXP} = 60$ . Foi apresentado o valor experimental de cada parâmetro, os valores obtidos em cada rodada, e o desvio padrão destes resultados. Em todos os casos observou-se uma distribuição melhor para o método Luus-Jaakola do que o PCA. Os parâmetros mais bem otimizados foram  $\theta_r$  e  $\theta_s$ .



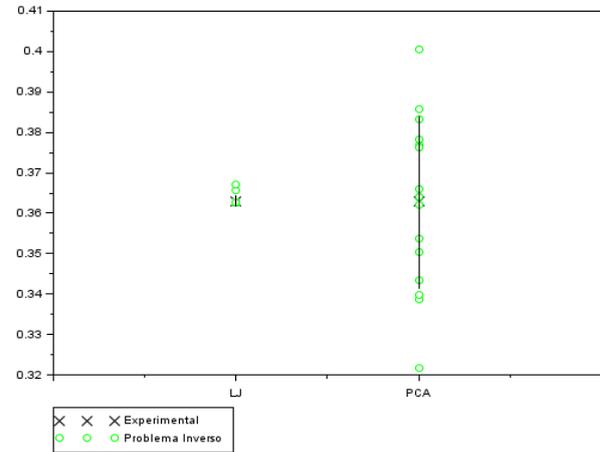
a. Avaliação do parâmetro  $\alpha$ .



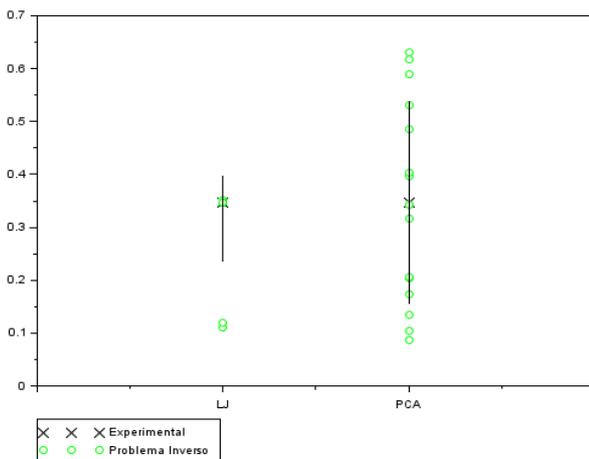
b. Avaliação do parâmetro  $\theta_r$ .



c. Avaliação do parâmetro  $n$ .



d. Avaliação do parâmetro  $\theta_s$ .



e. Avaliação do parâmetro  $m$ .

Figura 5. Comparação entre o método Luus-Jaakola e PCA.

## 4. DISCUSSÃO

O problema de otimização dos parâmetros da curva de retenção de água no solo varia para cada tipo de solo. A sensibilidade da condutividade hidráulica pode variar de um solo para outro, tornando-se muito mais sensível para solos arenosos, no qual a amplitude do intervalo de busca deste parâmetro de ser a menor possível. Desta forma, este parâmetro não foi incluído no conjunto de parâmetros otimizados deste trabalho.

Na análise de sensibilidade percebe-se que os parâmetros são sensíveis a pequenas variações. Com isso, tem-se que todos os parâmetros podem ser otimizados. Outra análise realizada é a verificação da correlação entre os parâmetros, dois a dois. O problema de ter dois parâmetros correlacionados, é que existe uma dependência linear entre eles, sendo assim, impossível de obtê-los ao mesmo tempo. No caso abordado, não existem correlações. Porém, a condutividade hidráulica se mostrou muito sensível a pequenas variações além da calculada na análise de sensibilidade. Logo, a mesma foi excluída do conjunto de parâmetros a ser otimizado.

O método Luus-Jaakola otimizou melhor resultado os parâmetros da Equação de Richards do que o Algoritmo de Colisão de Partículas. Como foi observado na análise estatística, a dispersão dos parâmetros foi menor para o método Luus-Jaakola.

Os parâmetros  $\theta_r$  e  $\theta_s$  são um caso a parte, pois mesmo no pior resultado utilizando o método Luus-Jaakola o erro foi de 0,49%. Mesmo no PCA, que obteve resultados inferiores aos do método Luus-Jaakola, o maior erro obtido para estes parâmetros foi de 13,74%.

O Algoritmo de Colisão de Partículas, apesar de capturar o comportamento da curva de retenção de van Genuchten, os parâmetros ficaram distantes dos valores experimentais.

O conjunto de parâmetros otimizados com o método Luus-Jaakola retornou a umidade volumétrica do solo melhor do que o PCA, como observado nas Figuras 2, 3 e 4. O PCA transladou a solução para um mínimo local que não traduz nos dados experimentais.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método Luus-Jaakola retornou resultados melhores do que o PCA. Porém o tempo médio de execução do mesmo foi de quase nove horas. O PCA, mesmo com configurações distintas, retornou solução transladada comparada com os dados experimentais. Uma

questão a ser tratado ainda, é a redução do tempo de execução no processo de otimização destes parâmetros.

## REFERÊNCIAS

CELIA, M. A., AHUJA, L. R., PINDER, G. F. "Orthogonal collocation and alternating-direction procedures for unsaturated flow problems", **Advances in Water Resources**, v. 10, n. 4, p. 178–187, dez. 1987. DOI: 10.1016/0309-1708(87)90027-3.

CELIA, M. A., BOULOUTAS, E. T., ZARBA, R. L. "A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation", **Water Resources Research**, v. 26, n. 7, p. 1483–1496, jul. 1990. DOI: 10.1029/WR026i007p01483.

GUTERRES, M. X. **Avaliação dos algoritmos de Picard-Krylov e Newton-Krylov na solução da equação de Richards**. 2013. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2013.

HUANG, K., MOHANTY, B. P., VAN GENUCHTEN, M. T. "A new convergence criterion for the modified Picard iteration method to solve the variably saturated flow equation", **Journal of Hydrology**, v. 178, n. 1–4, p. 69–91, abr. 1996. DOI: 10.1016/0022-1694(95)02799-8.

KROES, J. G., VAN DAM, J. C., GROENENDIJK, P., *et al.* **SWAP version 4. Theory description and user manual**. . Wageningen, [s.n.], 2017.

LEE, D. H., ABRIOLA, L. M. "Use of the Richards equation in land surface parameterizations", **Journal of Geophysical Research: Atmospheres**, v. 104, n. D22, p. 27519–27526, 27 nov. 1999. DOI: 10.1029/1999JD900951.

LU, N., GODT, J. W., WU, D. T. "A closed-form equation for effective stress in unsaturated soil", **Water Resources Research**, v. 46, n. 5, maio 2010. DOI: 10.1029/2009WR008646.

LUUS, R., JAAKOLA, T. H. I. "Optimization by direct search and systematic reduction of the size of search region", **AIChE Journal**, v. 19, n. 4, p. 760–766, jul. 1973. DOI: 10.1002/aic.690190413.

MOURA NETO, F. D., DA SILVA NETO, A. J. **An Introduction to Inverse Problems with Applications**. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2013.

PACHEPSKY, Y., TIMLIN, D., RAWLS, W. "Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils", **Journal of Hydrology**, v. 272, n. 1–4, p. 3–13, mar. 2003. DOI: 10.1016/S0022-1694(02)00251-2.

SACCO, W. F.; OLIVEIRA, C. R. E. A. A new stochastic optimization algorithm based on a particle collision metaheuristic. In: World Congress of Structural And Multidisciplinary Optimization WCSMO, VI, 2005. **Anais...** Rio de Janeiro: COPPE Publication, 2005.

SILVA NETO, A. J., BECCENERI, J. C., CAMPOS VELHO, H. F. **Computational Intelligence Applied to Inverse Problems in Radiative Transfer (In Portuguese)**. [S.l.], EdUERJ, 2016.

SILVA NETO, A. J., WHITE, R. E. "Numerical Solution of Fluid in Partially Saturated Porous Media", **Transactions of the Eleventh Army Conference on Applied Mathematics and Computing, ARO Report 94-1, Carnegie Mellon University, June**, v. 8–10, p. 353–371, 1994. .

TEMPERINI, M. O. **Inverse Modeling to Obtain Parameters for the Richards Equation (In Portuguese)**. 2018. 81 f. PGEB/UFF, Niterói, 2018.

VAN GENUCHTEN, M. T. "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of

Unsaturated Soils", **Soil Science Society of America Journal**, v. 44, n. 5, p. 892–898, set. 1980. DOI: 10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x.

ZHA, Y., SHI, L., YE, M., *et al.* "A generalized Ross method for two- and three-dimensional variably saturated flow", **Advances in Water Resources**, v. 54, p. 67–77, abr. 2013. DOI: 10.1016/j.advwatres.2013.01.002.