

A UTILIZAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA ANÁLISE DE PARÂMETROS POPULACIONAIS DA CIDADE DE GURUPI

CRUZ, Pedro Alexandre¹
ROSA, Laina Pires²
CRUZ, Leandra Cristina Crema³

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo da dinâmica populacional da cidade de Gurupi segundo o modelo linear, o modelo de Malthus e modelo de Verhulst. Os dados da população foram obtidos pelo IBGE pelo período de 2007 a 2014. Os modelos apresentaram um resultado aproximado ao valor real, apresentando uma margem de erro de 0,01%. O estudo da dinâmica populacional está relacionado diretamente com fatores sociais e econômicos. Gurupi é uma cidade que se encontra em crescimento sendo considerada uma cidade universitária, com a presença de

¹ Doutor em Matemática Aplicada pela USP. Professor do colegiado de Ciências Exatas e Biotecnológicas da Universidade Federal do Tocantins. E mail para correspondência: pedrocruz@uft.edu.br.

² Acadêmica do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia pela Universidade Federal do Tocantins. E mail: laina_eng@uft.edu.br.

³ Doutoranda em Engenharia de Alimentos pela UNESP. Professora do colegiado de Ciências Exatas e Biotecnológicas da Universidade Federal do Tocantins. E mail: leandracruz@uft.edu.br.

três IES públicas atraindo pessoas de todos os estados para a mesma. O estudo foi realizado acreditando-se que este levantamento possa ser útil para o planejamento de desenvolvimento futuro da cidade. Concluiu-se que para projeções em curto prazo, todos os modelos são adequados, porém o modelo linear e o modelo de Malthus ao admitirem crescimento ilimitado da população mostram não serem apropriados para estimativas a longo prazo.

Palavras-chave: Dinâmica populacional, modelos matemáticos, desenvolvimento.

THE USE OF MATHEMATICAL MODELS FOR ANALYSIS OF POPULATION PARAMETERS IN THE CITY OF GURUPI

ABSTRACT

This work aims to study the population dynamics of the city of Gurupi according to the linear model, the model of Malthus and Verhulst model. Population data were obtained by the IBGE for 2007 to 2014. The models showed an approximate result the real value, with a margin of error of 0.01%. The study of population dynamics is directly related to social and economic factors. Gurupi is a city that is growing is considered a university city with the presence of three public higher education institutions attracting people from all states for the same. The study was conducted in the belief that this survey will be useful for the future development of city planning. It was concluded that for projections in the short term, all models are adequate, but the linear model and the model of Malthus to admit unlimited population growth show are not suitable for long-term estimates.

Keywords: Population dynamics, mathematical models development.

1. INTRODUÇÃO

Neste artigo são apresentados modelos matemáticos que resultaram do desenvolvimento de um trabalho realizado no âmbito da iniciação científica. A proposta trabalhou o contexto de conteúdos matemáticos aliados a utilização de recursos computacionais.

Desde a antiguidade, a matemática vem sendo um instrumento para interpretar o mundo, e para isso é necessário a busca de uma visão estruturada da realidade, que consiste no fenômeno de modelagem que é tão antigo quanto à matemática (MAGALHÃES e LEITE, 2012).

Utilizou-se a modelagem matemática para tratar matematicamente a Dinâmica Populacional. A descrição do tamanho de populações ao longo do tempo analisada por meio de modelo matemático pode ser útil para prever a evolução populacional. Assim permite

avaliar quando uma população corre risco de se extinguir, ou estimar o tempo em que a população irá alcançar um determinado nível, e desta forma, planejar ações adequadas.

Na literatura inúmeros modelos matemáticos têm sido propostos para estimar o crescimento médio da população, enquanto uns têm uma base em relações meramente empíricas outros têm uma base teórica e são determinadas por equações diferenciais. Dentre vários modelos matemáticos, escolheu-se para analisar o crescimento populacional do município de Gurupi-TO, os modelos linear, Malthus e Verhulst. As taxas de crescimento necessárias para os modelos foram calculadas considerando-se as características e hipóteses básicas para cada tipo de modelo.

1.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA E A APLICAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS

O desenvolvimento do trabalho baseou-se, essencialmente na modelagem matemática como metodologia. Inicialmente estudou-se o

processo de modelagem matemática, sua etapas, características e exemplos. Uma das primeiras aplicações da modelagem matemática

foi no estudo das populações que aparentemente segue regras desordenadas.

Na modelagem populacional o foco principal é o estudo do crescimento de populações humanas, onde se verifica as taxas de natalidade, mortalidade, imigração, emigração de um local, permitindo aos governantes determinarem os recursos necessários para o atendimento das necessidades básicas da população (LEITE et al, 2011). Fazendo uso desses dados estatísticos e de uma adequada modelagem, torna-se possível prever as taxas de crescimento futuras das populações analisadas e desta forma, atuar no dimensionamento de recursos para essas populações ou no controle efetivo, caso o crescimento seja descontrolado.

O município de Gurupi conta com três instituições de ensino superior sendo Universidade Federal do Tocantins-UFT, Instituto Federal do Tocantins-IFTO e o Centro Universitário UnirG. Sendo que a UFT conta com os seguintes cursos ofertados atualmente Agronomia, Química Ambiental, Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia e Engenharia Florestal, já o IFTO conta com o ensino médio integrado na área

de agronegócio, cursos técnicos e tecnólogo. A UnirG é uma instituição pública municipal que atualmente conta com vários cursos na área da saúde como medicina, enfermagem, odontologia entre outros, mas também possui cursos na área das exatas, engenharia e educação.

A maioria dos estudantes que frequentam essas instituições são de outros estados com isso mantêm uma grande diversidade cultural, sendo que uma grande parte desses alunos são dos Estados do Maranhão, Pará, e Goiás. Para o IBGE, estudantes universitários não entram na contagem populacional do município, pois a maioria não possui residência própria, renda, e que quando terminam sua graduação retorna ao estado de origem.

Dentre as diversas possibilidades que o tema apresenta, optou-se pela análise do crescimento da população de Gurupi-TO. Os dados utilizados foram coletados no Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. O ano de 2007 foi identificado como o instante inicial ($t=0$) e, dessa forma, o ano de 2014 corresponde a $t=7$. Os valores da população do município de Gurupi neste período estão na Tabela 1 e representado na Figura 1.

Tabela 1: População de Gurupi

ANO	TEMPO	População Real
2007	0	71413
2008	1	73548
2009	2	74357
2010	3	76755
2011	4	77655
2012	5	78525
2013	6	81792
2014	7	82762

FONTE: IBGE (2015).

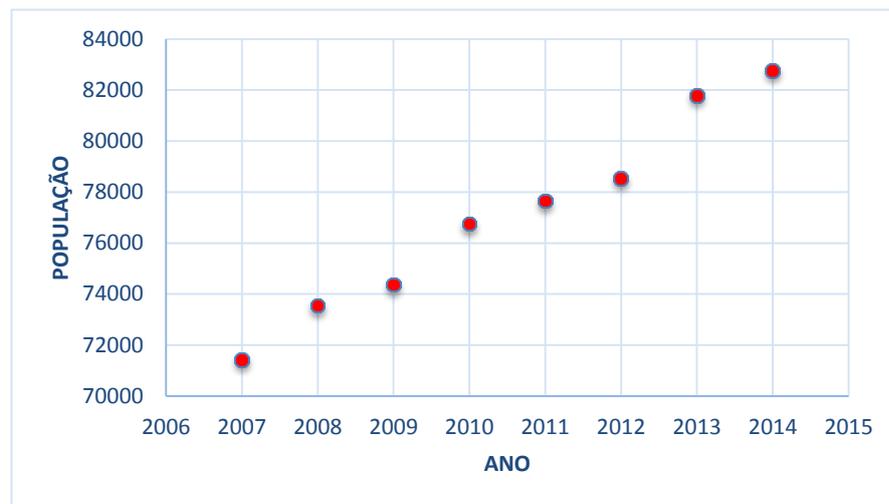


Figura 1. População de Gurupi de 2007 a 2014.

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa

A seguir, são apresentados os modelos matemáticos linear, de Malthus e Verhulst que foram utilizados. Buscou-se mostrar como, a

partir da incorporação de diferentes suposições, a formulação dos modelos pode evoluir.

1.2 MODELO LINEAR

Para este modelo a suposição básica é que a variação do número total de indivíduos é constante, ou seja, admite-se que o acréscimo (ou decréscimo) da quantidade de indivíduos por unidade de tempo não

varia com o tempo. A expressão geral para este modelo é dada por:

$$P = rt + P_0$$

Onde r é a taxa de crescimento, t é o tempo e P_0 é a população inicial. Consideramos $P(0) = 71.413$, que

corresponde à população total de Gurupi no ano de 2007.

$$r = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

A estimativa da taxa de crescimento foi feita a partir da média

da variação anual do número de indivíduos ($\Delta t = 1$), conforme Tabela 2 abaixo.

Tabela 2: Acréscimo anuais do número de indivíduos em Gurupi.

TEMPO	População Real	Taxa de crescimento (nº de habitante/ano)
0	71.413	-
1	73.548	2.135
2	74.357	809
3	76.755	2398
4	77.655	900
5	78.525	870
6	81.792	3.267
7	82.762	970

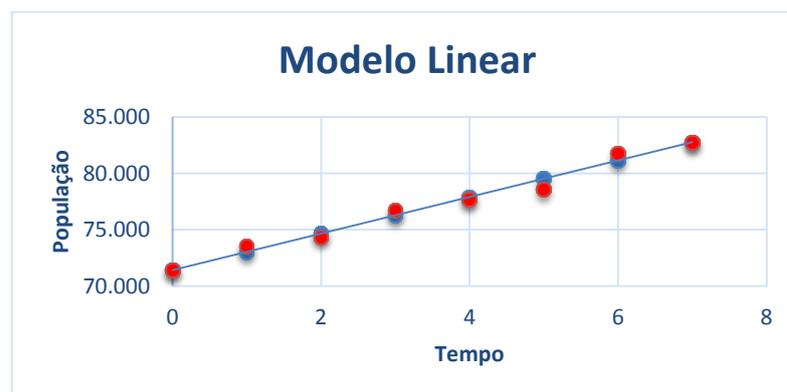
FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

O valor médio obtido foi de $r = \frac{11.349}{7} = 1.621$

pontos originais apresentados na Tabela 1.

A Figura 2 mostra o gráfico que representa o Modelo Linear e os

Figura 2: Modelo Linear $P = 1.621t + 71.413$ para a população de Gurupi.



FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

Pode-se observar que o mesmo resultado pode ser obtido por meio de progressão aritmética, possibilitando a

exploração de outros conteúdos matemáticos correspondentes

Entretanto, na utilização da modelagem matemática de crescimento populacional, nem sempre é permitido supor que a quantidade de indivíduos acrescida na população seja constante. Isso só é válido como suposição para um determinado período de tempo ou para uma

população em particular. Admitindo-se que o número de indivíduos que é acrescido depende, por exemplo, do tamanho da própria população, o modelo linear não é o mais adequado. Serão apresentados outros modelos que possibilitam determinar o crescimento populacional.

1.3 MODELO DE MALTHUS

Este modelo considera como hipótese básica que a população cresce sem qualquer restrição, não admitindo fatores que regulam seu crescimento, tais como: epidemias, guerras, fome, entre outros. Supõe-se que o número total de indivíduos varia com o tempo, dependendo da quantidade presente em cada instante. Admitindo-se que a taxa de crescimento é contínua, o modelo de Malthus é descrito por:

$$P = P_0 e^{rt}$$

Onde P_0 é a população inicial, r é taxa de crescimento e t é o tempo.

Para a determinação da taxa de crescimento r , foram realizados dois

procedimentos distintos: uma média das taxas relativas anuais e a taxa relativa total do período conforme a e b descritos a seguir.

a) Média das taxas

A estimativa da taxa de crescimento, neste caso, foi feita considerando-se o crescimento relativo em cada ano, isto é, comparando-se o crescimento do número de indivíduos em relação à população do ano anterior.

Neste caso foram calculados uma taxa por ano, e a taxa foi obtida considerando-se a média dos acréscimos relativos no período, conforme mostrado na Tabela 3.

Tabela 3: Acréscimos relativos anuais do número de indivíduos de Gurupi.

Tempo	População Real	Crescimento Relativo
0	71413	-
1	73548	0,029
2	74357	0,020
3	76755	0,024
4	77655	0,020
5	78525	0,018
6	81792	0,022
7	82762	0,021

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

b) Taxa Total

Neste caso foi obtido o acréscimo relativo total do período por:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_{final} - N_{inicial}}{N_{inicial}} = \frac{82762 - 71413}{71413} = 0,1589$$

E a taxa de crescimento

resultante foi de $r = \frac{0,1589}{7} = 0,023$.

A Figura 3 mostra o gráfico do Modelo de Malthus e os pontos apresentados na Tabela 1.

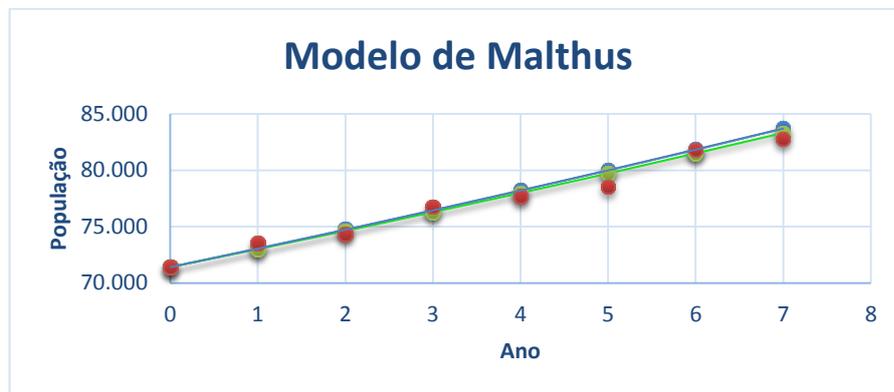


Figura 2: Modelos de Malthus para os casos (a) e (b); (a) representado pela linha verde e (b) pela linha azul.

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

Como o modelo exponencial não prevê qualquer tipo de inibição para o crescimento populacional, o mesmo pode não ser adequado para representar o que ocorre em muitas populações em longo prazo. Na maioria das vezes, considera-se que o crescimento da população é inibido por

algum fator como: falta de espaço, escassez de alimentação, fome, epidemias. Em outras palavras, pode-se supor que a taxa de crescimento populacional diminui com o crescimento da população, e que existe uma capacidade máxima sustentável para essa população.

1.3 MODELO DE VERHULST

A suposição para este modelo é que a população sofre inibições naturais no seu crescimento, ou seja, admite-se que a taxa de crescimento decresce com a população. Neste modelo, considera-se que há um nível populacional máximo, que descreve a capacidade suporte do meio. Uma vez que se atinge este nível, a população tende a se estabilizar. Este modelo é descrito por:

$$P = \frac{K.P_0}{P_0 + (K - P_0).e^{-rt}}$$

Onde P é o número de indivíduos no instante t , K representa a capacidade suporte do meio, P_0 é a população inicial, r é taxa de crescimento, e t o tempo.

Para a obtenção de um valor para a capacidade suporte da população de Gurupi, utilizou-se o método de Ford-Walford (BASSANEZI,2009). Este método supõe que, uma vez em equilíbrio, a população não varia mais, ou seja, $P_{t+1} = P_t$. Assim a estimativa para a capacidade suporte é obtida relacionando os valores da população nos instantes t e $t+1$ e a partir dos pontos obtidos se encontra a reta que melhor se ajusta aos pontos.

A Figura 4 mostra a reta ajustada e a equação da reta, para a determinação de K .

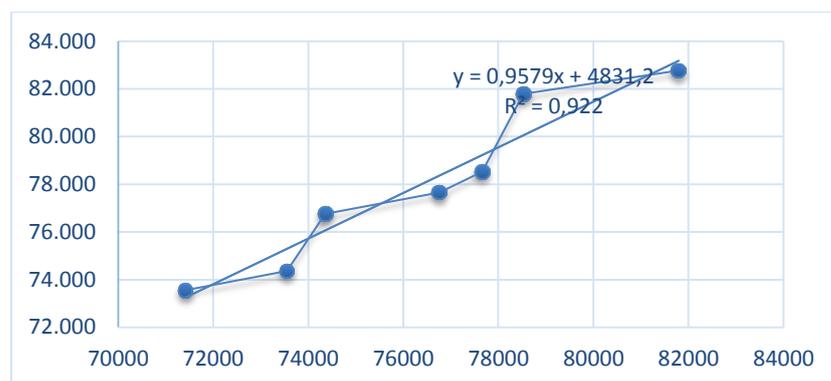


Figura 4: Reta ajustada para $P_{t+1} = f(P_t)$.

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

Fazendo a linearização, obtemos o valor da capacidade suporte da população.

$$K = \frac{4831,2}{(1 - 0,9579)} = 114755$$

A estimativa para taxa de crescimento r foi feita através dos

dados obtidos pelo IBGE, e pelo próprio modelo. Assim sendo, isolando r no modelo temos que:

$$r = -\frac{1}{t} \ln \left[\frac{P_0 \left(\frac{K}{P} - 1 \right)}{P(K - P_0)} \right]$$

Tabela 4: Estimativa da taxa de crescimento r .

Tempo	População	r
0	71413	-
1	73548	0,0800
2	74357	0,0554
3	76755	0,0679
4	77655	0,0598
5	78525	0,0548
6	81792	0,0682
7	82762	0,0644

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

A Tabela 4 apresenta os valores de r para cada ano, a partir de 2007.

O valor médio obtido para todo o período foi de $r = 0,0644$. A Figura 5

apresenta o valor da população real em conjunto com os valores da população obtido pelo Modelo de Verhulst.

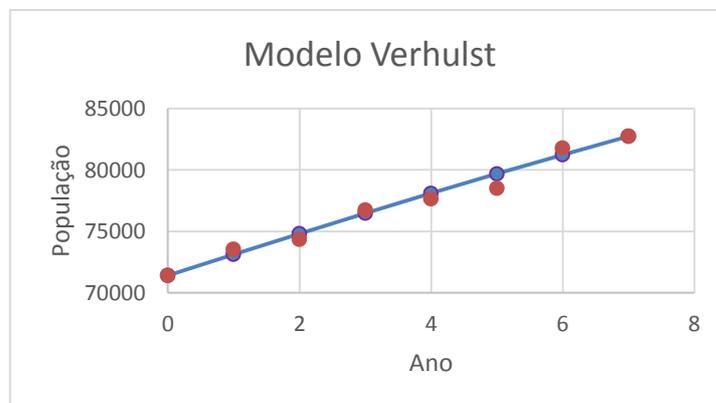


Figura 5: Modelo de Verhulst $P(t) = \frac{8194998815}{71413 + 43342e^{-0,0644t}}$ para a população de Gurupi.

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

2. RESULTADOS OBTIDOS

A tabela 5 apresenta uma comparação básica para os três modelos propostos neste trabalho. Esta comparação foi realizada

calculando a diferença entre os valores apresentados pelo IBGE e os valores estimados pelos modelos matemáticos.

Tabela 5: Comparação entre os valores obtidos pelos modelos matemáticos e os valores apresentados pelo IBGE.

Tempo	IBGE-linear	IBGE-Malthus	IBGE-Verhulst
0	0	0	0
1	514	495	413
2	299	373	470
3	478	309	269
4	243	547	455
5	994	1472	1171
6	651	42	548
7	0	979	12
Soma- Total	3179	4217	3338

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

Analisando os dados da Tabela 5, pode-se observar que o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados observados para o crescimento populacional de Gurupi é o modelo linear, pois a soma das diferenças foi a menor entre todos os modelos.

Todavia, é sabido que o crescimento ilimitado não é possível a longo prazo, e desta forma pode-se descartar tanto o modelo de Malthus quanto o modelo linear nos estudos de projeções populacionais futuras (ver Figura 6). Além disso, na tabela 5 pode ser observado que o erro

cometido pelo modelo de Verhulst está muito próximo do erro cometido pelo modelo linear, além de que o modelo de Verhulst contempla a questão da capacidade suporte do meio.

Para demonstrar que realmente modelos matemáticos podem ser utilizados para estimar a população de um meio, a tabela 6 abaixo apresenta o cálculo dos erros relativos (globais) entre os valores obtidos pelos modelos matemáticos (Val. Num) e o valor apresentado pelo IBGE (Val. Exata) pela fórmula:

$$Erro (Val. Num) = \sqrt{\frac{\sum(Val. Exata - Val. Num)^2}{\sum(Val. Exata)^2}}$$

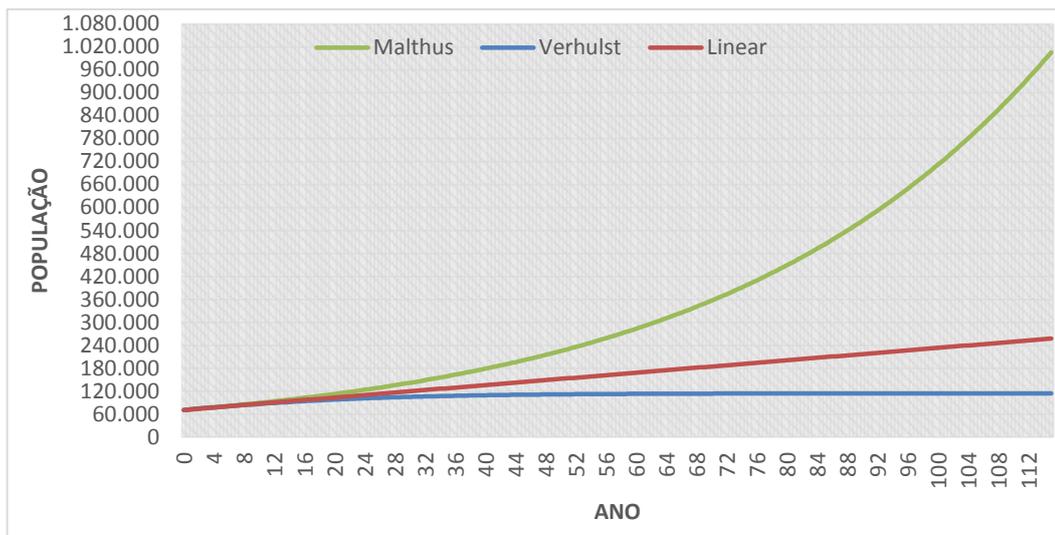


Figura 6: Estimativas de crescimento a longo prazo utilizando os três modelos do trabalho.

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

Pode-se observar novamente (ver tabela 6) que o erro cometido pelo modelo linear é o menor, porém muito próximo do modelo de Verhulst.

Nota-se que para projeções em curto prazo, todos os modelos são adequados, porém o

modelo linear e o modelo de Malthus ao admitirem crescimento ilimitado da população mostram não serem apropriados para estimativas a longo prazo.

Tabela 6: Erros relativos obtidos pelos três modelos matemáticos.

Erro_Linear	Erro_Malthus	Erro_Verhulst
0,006562805	0,009052225	0,007010393

FONTE: Rosa e Cruz, dados da pesquisa.

3. COMENTÁRIOS FINAIS

A elaboração deste trabalho proporcionou uma visão ampla sobre o contexto de dinâmica populacional, e um aprendizado mais completo dos modelos matemáticos. Vale ressaltar ainda que a modelagem matemática pode ser utilizada não só apenas na

dinâmica populacional, mas também em outras áreas, pois a mesma traz a possibilidade de explorar e construir alguns conceitos matemáticos, por exemplo, o estudo das taxas de crescimento possibilita a introdução de

derivada, a partir da análise da variação do tamanho da população.

O estudo realizado para o município de Gurupi foi de grande relevância, para prever, de certa

forma, o valor da população para anos futuro, oferecendo dados para que o município possa se preparar para planejar o crescimento da população de forma adequada.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processo nº 136974/2014-7; 457373/2014-8). Conselho Nacional de

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2009.

BASSANEZI, Rodney Carlos, FERREIRA, Wilson Castro Junior. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Contagem da População 2007**. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/contagem2007/>> Acesso em: 15 Agos. 2014.

LEITE Maria Beatriz et al. **Modelos Matemáticos para o crescimento da população de Estado de São Paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento**. Revista Ciência e Educação, v.17, n.4, p. 927-940, 2011.

MAGALHÃES, Maycon Luiz A., LEITE, Neila M. Gualberto. **Equações Diferenciais Aplicadas a Dinâmica Populacional, Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC NORDESTE**, p. 351-353, 2012.

SIMONATO, Adriano Luís, GALLO, Kenia Cristina. **Aplicação de Modelagem no Crescimento Populacional Brasileiro**, Disponível em: <<http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/9/19042010084307.pdf>> Acessado em: 20 Agos. 2014

ZILL, Dennis G., **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**, São Paulo: Thomson Learning, 2009.

Recebido em: 22/12 /2015
Aprovado em: 08/04/2016